La **inducción electromagnética** es el fenómeno que origina la producción de una fuerza electromotriz (f.e.m. o voltaje) en un medio o cuerpo expuesto a un campo magnético variable, o bien en un medio móvil respecto a un campo magnético estático. Es así que, cuando dicho cuerpo es un conductor, se produce una corriente inducida. Este fenómeno fue descubierto por Michael Faraday quién lo expresó indicando que la magnitud del voltaje inducido es proporcional a la variación del flujo magnético (*Ley de Faraday*).

Por otra parte, Heinrich Lenz comprobó que la corriente debida a la f.e.m. inducida se opone al cambio de flujo magnético, de forma tal que la corriente tiende a mantener el flujo. Esto es válido tanto para el caso en que la intensidad del flujo varíe, o que el cuerpo conductor se mueva respecto de él.

Definición matemática

Matemáticamente se puede expresar como:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde:

$\mathcal{E}$= Fuerza electromotriz en voltios

Φ = Flujo magnético en weber

t = Tiempo en segundos

y el signo − es debido a la Ley de Lenz.

La inducción electromagnética es el principio fundamental sobre el cual operan transformadores, generadores, motores eléctricos, la vitrocerámica de inducción y la mayoría de las demás máquinas eléctricas.

De forma más general, las ecuaciones que describen el fenómeno son:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$V = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Ley de Faraday

La **Ley de inducción electromagnética de Faraday** (o simplemente **Ley de Faraday**) se basa en los experimentos que Michael Faraday realizó en 1831 y establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como borde:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{dl}$ es el elemento infinitesimal del contorno *C*, $\vec{B}$ es la densidad de campo magnético y *S* es una superficie arbitraria, cuyo borde es *C*. Las direcciones del contorno *C* y de $\vec{dA}$ están dadas por la regla de la mano izquierda.

La permutación de la integral de superficie y la derivada temporal se puede hacer siempre y cuando la superficie de integración no cambie con el tiempo.

Por medio del teorema de Stokes puede obtenerse una forma diferencial de esta ley:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ésta es una de las ecuaciones de Maxwell, las cuales conforman las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo. La ley de Faraday, junto con las otras leyes del electromagnetismo, fue incorporada en las ecuaciones de Maxwell, unificando así al electromagnetismo.

En el caso de un inductor con *N* vueltas de alambre, la fórmula anterior se transforma en:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

donde $\mathcal{E}$ es la fuerza electromotriz inducida y $d\Phi/dt$ es la tasa de variación temporal del flujo magnético Φ. La dirección de la fuerza electromotriz (el signo negativo en la fórmula) se debe a la ley de Lenz.

Inducción magnética

La **inducción magnética** o **densidad de flujo magnético**, cuyo símbolo es **B**, es el flujo magnético por unidad de área de una sección normal a la dirección del flujo, y en algunos textos modernos recibe el nombre de intensidad de campo magnético, ya que es el campo real.

La unidad de la densidad en el Sistema Internacional de Unidades es el tesla.

Está dado por: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(q\vec{v}) \times \hat{u}_r}{r^2}$

Donde B es la densidad del flujo magnético generado por una carga que se mueve a una velocidad v a una distancia r de la carga, y u_r es el vector unitario que une la carga con el punto donde se mide B (el punto r).

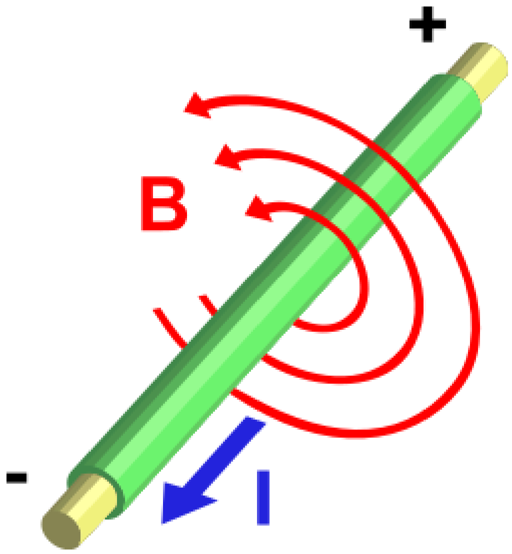
o bien $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{(I d\vec{l}) \times \hat{u}_r}{r^2}$

Donde B es la densidad del flujo magnético generado por un conductor por el cual pasa una corriente I, a una distancia r.

La fórmula de esta definición se llama Ley de Biot-Savart, y es en magnetismo la equivalente a la Ley de Coulomb de la electrostática, pues sirve para calcular las fuerzas que actúan en cargas en movimiento.

El campo inducción, **B**, o densidad de flujo magnético (los tres nombres son equivalentes) es más fundamental en electromagnetismo que el campo **H**, ya que es el responsable de las fuerzas en las cargas en movimiento y es, por tanto, el equivalente

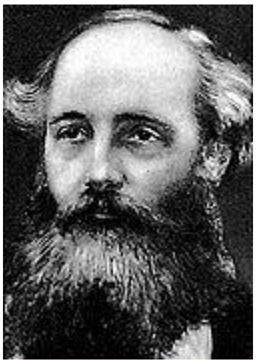
Ecuaciones de Maxwell



Las cuatro ecuaciones de Maxwell describen todos los fenómenos electromagnéticos, aquí se muestra la inducción magnética por medio de una corriente eléctrica.

Las **ecuaciones de Maxwell** son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos. La gran contribución de James Clerk Maxwell fue reunir en estas ecuaciones largos años de resultados experimentales, debidos a Coulomb, Gauss, Ampere, Faraday y otros, introduciendo los conceptos de campo y corriente de desplazamiento, y unificando los campos eléctricos y magnéticos en un solo concepto: el campo electromagnético.[1]

Desarrollo histórico de las ecuaciones de Maxwell



Retrato de Maxwell.

Véase también: Electromagnetismo

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que aparecieron de manera separada en la publicación de 1861 *On Physical Lines of Force* por parte del científico James Clerk Maxwell. El trabajo en sí no era obra sólo de Maxwell, en las ecuaciones notamos la ley de Faraday (ecuación 54 en su trabajo), la ecuación 56, div **B** = 0, de su autoría, la ley de Ampère con correcciones hechas por él (ecuación 112) y la ley de Gauss (ecuación 113). Éstas expresan respectivamente como el cambio de los campos magnéticos producen campos eléctricos, la ausencia experimental de monopolos magnéticos, cómo una corriente eléctrica y el cambio en los campos eléctricos producen campos magnéticos y cómo cargas eléctricas producen campos eléctricos. En el trabajo original de Maxwell se podían encontrar muchas otras ecuaciones pero se llegó a simplificarlas a estas cuatro.[2]

El aspecto más importante del trabajo de Maxwell en el electromagnetismo es el término que introdujo en la ley de Ampère; la derivada temporal de un campo eléctrico, conocido como corriente de desplazamiento. El trabajo que Maxwell publicó en 1865, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, modificaba la versión de la ley de Ampère con lo que se predecía la existencia de ondas electromagnéticas propagándose, dependiendo del medio material, a la velocidad de la luz en dicho medio. De esta forma Maxwell identificó la luz como una onda electromagnética, unificando así la óptica con el electromagnetismo.[3]

Exceptuando la modificación a la ley de Ampère, ninguna de las otras ecuaciones era original. Lo que hizo Maxwell fue re obtener dichas ecuaciones a partir de modelos mecánicos e hidrodinámicos usando su modelo de vórtices de líneas de fuerza de Faraday.

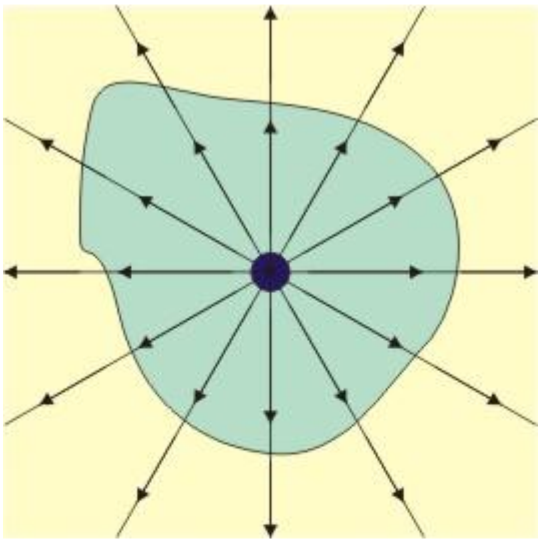
En 1884, Oliver Heaviside junto con Willard Gibbs agrupó estas ecuaciones y las reformuló en la notación vectorial actual. Sin embargo, es importante conocer que al hacer eso, Heaviside usó derivadas parciales temporales, diferentes a las derivadas totales usadas por Maxwell, en la ecuación (54). Ello provocó que se perdiera el término ***vxB*** que aparecía en la ecuación posterior del trabajo de Maxwell (número 77). En la actualidad, este término se usa como complementario a estas ecuaciones y se conoce como fuerza de Lorentz.

La historia es aún confusa, debido a que el término **ecuaciones de Maxwell** se usa también para un conjunto de ocho ecuaciones en la publicación de Maxwell de 1865, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, y esta confusión se debe a que seis de las ocho ecuaciones son escritas como tres ecuaciones para cada eje de coordenadas, así se puede uno confundir al encontrar veinte ecuaciones con veinte incógnitas. Los dos *tipos* de ecuaciones son casi equivalentes, a pesar del término eliminado por Heaviside en las actuales cuatro ecuaciones.

Detalle de las ecuaciones

Ley de Gauss

Artículo principal: *Ley de Gauss*



Flujo eléctrico de una carga puntual en una superficie cerrada.

La ley de Gauss explica la relación entre el flujo del campo eléctrico y una superficie cerrada. Se define como flujo eléctrico (Φ) a la cantidad de *fluido eléctrico* que atraviesa una superficie dada. Análogo al flujo de la mecánica de fluidos, este fluido eléctrico no transporta materia, pero ayuda a analizar la cantidad de campo eléctrico ($\vec{E}$) que pasa por una superficie.[4] Matemáticamente se la expresa como:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}_{(r)} \cdot d\vec{s}$$

La ley dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga (q) o la suma de las cargas que hay en el interior de la superficie y la permitividad eléctrica en el vacío (ε_0), así:[5 6]

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La forma diferencial de la ley de Gauss es

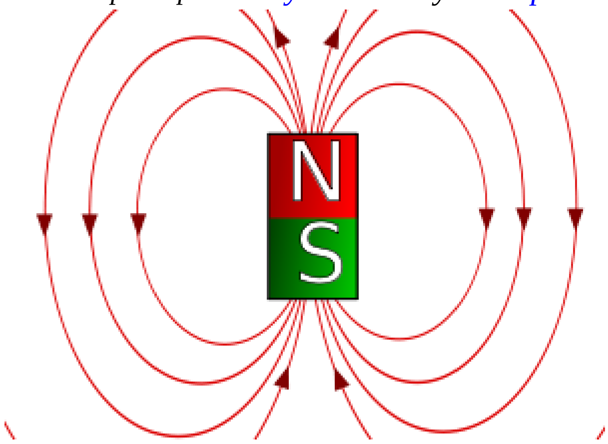
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Donde ρ es la densidad de carga. Esta expresión es para una carga en el vacío, para casos generales se debe introducir una cantidad llamada densidad de flujo eléctrico ($\vec{D}$) y nuestra expresión obtiene la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Ley de Gauss para el campo magnético

Artículos principales: Ley de Gauss y Monopolo magnético



Las líneas de campo magnético comienzan y terminan en el mismo lugar, por lo que no existe un monopolo magnético.

Experimentalmente se llegó al resultado de que los campos magnéticos, a diferencia de los eléctricos, no comienzan y terminan en cargas diferentes. Esta ley primordialmente indica que las líneas de los campos magnéticos deben ser cerradas. En otras palabras, se dice que sobre una superficie cerrada, sea cual sea ésta, no seremos capaces de encerrar una fuente o sumidero de campo, esto expresa la no existencia del monopolo magnético.[7] Matemáticamente esto se expresa así:[6]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Donde $\vec{B}$ es la densidad de flujo magnético, también llamada inducción magnética.

Su forma integral equivalente:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Como en la forma integral del campo eléctrico, esta ecuación sólo funciona si la integral está definida en una superficie cerrada.

Ley de Faraday-Lenz

Artículo principal: Ley de Faraday-Lenz

La ley de Faraday nos habla sobre la inducción electromagnética, la que origina una fuerza electromotriz en un campo magnético. Esta ley es muchas veces llamada como ley de Faraday-Lenz, debido a que Heinrich Lenz descubrió ésta inducción de manera separada a Faraday pero casi simultánea.[8] Lo primero que se debe introducir es la fuerza electromotriz ($\mathcal{E}$), si tenemos un campo magnético variable con el tiempo, una fuerza electromotriz es inducida en cualquier circuito eléctrico; y esta fuerza es igual a menos la derivada temporal del flujo magnético, así:[9]

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt},$$

Como el campo magnético es dependiente de la posición tenemos que el flujo magnético es igual a:

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Además, el que exista fuerza electromotriz indica que existe un campo eléctrico que se representa como:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Con lo que finalmente se obtiene la expresión de la ley de Faraday:[6]

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Lo que indica que un campo magnético que depende del tiempo implica la existencia de un campo eléctrico, del que su circulación por un camino arbitrario cerrado es igual a menos la derivada temporal del flujo magnético en cualquier superficie limitada por el camino cerrado.

La forma diferencial de esta ecuación es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación relaciona los campos eléctrico y magnético, pero tiene también muchas otras aplicaciones prácticas. Esta ecuación describe cómo los motores eléctricos y los generadores eléctricos funcionan. Más precisamente, demuestra que un voltaje puede ser generado variando el flujo magnético que atraviesa una superficie dada.

Ley de Ampere generalizada

Ampere formuló una relación para un campo magnético inmóvil y una corriente eléctrica que no varía en el tiempo. La ley de Ampere nos dice que la circulación en un campo magnético ($\vec{B}$) a lo largo de una curva cerrada C es igual a la densidad de corriente ($\vec{J}$) sobre la superficie encerrada en la curva C, matemáticamente así:[6]

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S}$$

Donde $\mu_0$es la permeabilidad magnética en el vacío.

Pero cuando esta relación se la considera con campos que sí varían a través del tiempo llega a cálculos erróneos, como el de violar la conservación de la carga.[10] Maxwell corrigió esta ecuación para lograr adaptarla a campos no estacionarios y posteriormente pudo ser comprobada experimentalmente. Maxwell reformuló esta ley así:[6]

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En el caso específico estacionario esta relación corresponde a la ley de Ampere, además confirma que un campo eléctrico que varía con el tiempo produce un campo magnético y además es consecuente con el principio de conservación de la carga.[10]

En forma diferencial, ésta ecuación toma la forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En medios materiales

Para el caso de que las cargas estén en medios materiales, y asumiendo que éstos son lineales, homogéneos, isótropos y no dispersivos, podemos encontrar una relación entre los vectores intensidad e inducción a través de dos parámetros conocidos como permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética:[11]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Pero estos valores también dependen del medio material, por lo que se dice que un medio es lineal cuando la relación entre E/D y B/H es lineal. Si esta relación es lineal, matemáticamente se puede decir que εy μ están representadas por una matriz 3x3. Si un medio es isótropo es porque esta matriz ha podido ser diagonalizada y consecuentemente es equivalente a una función $\varepsilon(x, y, z)$; si en esta diagonal uno de los elementos es diferente al otro se dice que es un medio anisótropo. Estos elementos también son llamados constantes dieléctricas y, cuando estas constantes no dependen de su posición, el medio es homogéneo.[12]

El valor de εy μ en medios lineales no dependen de las intensidades del campo. Por otro lado, la permitividad y la permeabilidad son escalares cuando las cargas están en medios homogéneos e isótropos. Los medios heterogéneos e isótropos dependen de las coordenadas de cada punto por lo que los valores, escalares, van a depender de la posición. Los medios anisótropos son tensores.[11] Finalmente, en el vacío tanto ρcomo $\vec{J}$ son cero porque suponemos que no hay fuentes.

En la siguiente tabla encontramos a las ecuaciones como se las formula en el vacío y en la forma más general.[13]

En el vacío	Caso general
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\jmath} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell como ahora las conocemos son las cuatro citadas anteriormente y a manera de resumen se pueden encontrar en la siguiente tabla:

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
Ley de Faraday:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
Ley de Ampère generalizada:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \mu_0 \epsilon_0$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S$

Estas cuatro ecuaciones junto con la fuerza de Lorentz son las que explican cualquier tipo de fenómeno electromagnético. Una fortaleza de las ecuaciones de Maxwell es que permanecen invariantes en cualquier sistema de unidades, salvo de pequeñas excepciones, y que son compatibles con la relatividad especial y general. Además Maxwell descubrió que la cantidad $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ era simplemente la velocidad de la luz en el vacío, por lo que la luz es una forma de radiación electromagnética. Los valores aceptados actualmente para la velocidad de la luz, la permitividad y la permeabilidad magnética se resumen en la siguiente tabla:

Símbolo	Nombre	Valor numérico	Unidad de medida SI	Tipo
c	Velocidad de la luz en el vacío	2.998×10^8	metros por segundo	definido
ϵ_0	Permitividad	8.854×10^{-12}	faradios por metro	derivado
μ_0	Permeabilidad magnética	$4\pi \times 10^{-7}$	henrios por metro	definido

Potencial escalar y potencial vector

Como consecuencia matemática de las ecuaciones de Maxwell y además con el objetivo de simplificar sus cálculos se han introducido los conceptos de potencial vector ($\vec{A}$) y potencial escalar (Φ). Este potencial vector no es único y no tiene significado físico claro pero se sabe que un elemento infinitesimal de corriente da lugar a una contribución $d\vec{A}$ paralela a la corriente.[14] Este potencial se obtiene como consecuencia de la ley de Gauss para el flujo magnético, ya que se conoce que si la divergencia de un vector es cero, ese vector como consecuencia define a un rotacional, así:[15]

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$
$$\iff \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

A partir de este potencial vector y de la ley de Faraday puede definirse un potencial escalar así:[13]

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) &= 0 \\ \nabla \times (\vec{E} + \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}) &= 0 \\ \iff \quad -\nabla \Phi &= \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Donde el signo menos ($-$) es por convención. Estos potenciales son importantes porque poseen una simetría gauge que nos da cierta libertad a la hora de escogerlos.[13] El campo eléctrico en función de los potenciales:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Hallamos que con la introducción de estas cantidades las ecuaciones de Maxwell quedan reducidas solo a dos, puesto que, la ley de Gauss para el campo magnético y la ley de Faraday quedan satisfechas por definición. Así la ley de Gauss para el campo eléctrico escrita en términos de los potenciales:

$$-\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y la ley de Ampére generalizada

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Nótese que se ha pasado de un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de primer orden a solo dos ecuaciones diferenciales parciales pero de segundo orden. Sin embargo, estas ecuaciones se pueden simplificar con ayuda de una adecuada elección del gauge.

Consecuencias físicas de las ecuaciones

Principio de conservación de la carga

Las ecuaciones de Maxwell llevan implícitas el principio de conservación de la carga. El principio afirma que la carga eléctrica no se crea ni se destruye, ni global ni localmente, sino que únicamente se transfiere; y que si en una superficie cerrada está disminuyendo la carga contenida en su interior, debe haber un flujo de corriente neto hacia el exterior del sistema. Es decir la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\vec{J}$ satisfacen una ecuación de continuidad.

A partir de la forma diferencial de la ley de Ampere se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)$$

Que al reemplazar la ley de Gauss y tomar en cuenta que $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$ (para cualquier vector $\vec{A}$), se obtiene:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

O bien en forma integral: $0 = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{dq}{dt}$

Ecuaciones originales de Maxwell

En el capítulo III de *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, titulado "Ecuaciones generales del campo electromagnético", Maxwell formuló ocho ecuaciones que las nombró de la A a la H.[16] Estas ecuaciones llegaron a ser conocidas como "las ecuaciones de Maxwell", pero ahora este epíteto lo reciben las ecuaciones que agrupó Heaviside. La versión de Heaviside de las ecuaciones de Maxwell realmente contiene solo una ecuación de las ocho originales, la ley de Gauss que en el conjunto de ocho sería la ecuación G. Además Heaviside fusionó la ecuación A de Maxwell de la corriente total con la ley circuital de Ampère que en el trabajo de Maxwell era la ecuación C. Esta fusión, que Maxwell por si mismo publicó en su trabajo *On Physical Lines of Force* de 1861 modifica la ley circuital de Ampère para incluir la corriente de desplazamiento de Maxwell.

Las ocho ecuaciones originales de Maxwell pueden ser escritas en forma vectorial así:

Denominación	Nombre	Ecuación
A	Ley de corrientes totales	$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
B	Definición de vector potencial magnético	$\mu \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
C	Ley circuital de Ampere	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{tot}$
D	Fuerza de Lorentz	$\vec{E} = \mu \vec{v} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$
E	Ecuación de electricidad elástica	$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$
F	Ley de Ohm	$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J}$
G	Ley de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

H	Ecuación de continuidad de carga	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Donde : $\vec{H}$ es el vector intensidad de campo magnético (llamado por Maxwell como *intensidad magnética*), $\vec{J}$ es la densidad de corriente eléctrica y $\vec{J}_{tot}$ es la corriente total incluida la corriente de desplazamiento, $\vec{D}$ es el campo desplazamiento (desplazamiento eléctrico), ρ es la densidad de carga libre (cantidad libre de electricidad), $\vec{A}$ es el vector potencial magnético (impulso magnético), $\vec{E}$ es el campo eléctrico (fuerza electromotriz (no confundir con la actual definición de fuerza electromotriz)), ϕ es el potencial eléctrico y σ es la conductividad eléctrica (resistencia específica, ahora solo resistencia).

Maxwell no consideró a los medios materiales en general, esta formulación inicial usa la permitividad y la permeabilidad en medios lineales, isótropos y no dispersos, a pesar que también se las puede usar en medios anisótropos.

Maxwell incluyó el término $\mu\vec{v} \times \vec{H}$ en la expresión de la fuerza electromotriz de la ecuación D, que corresponde a la fuerza magnética por unidad de carga en un conductor que se mueve a una velocidad $\vec{v}$. Esto significa que la ecuación D es otra formulación de la fuerza de Lorentz. Esta ecuación primero apareció como la ecuación 77 de la publicación *On Physical Lines of Force* de Maxwell, anterior a la publicación de Lorentz. En la actualidad esta fuerza de Lorentz no forma parte de las ecuaciones de Maxwell pero se la considera una ecuación adicional fundamental en el electromagnetismo.

Expresión de las ecuaciones en relatividad

En la relatividad especial, las ecuaciones de Maxwell en el vacío se escriben mediante unas relaciones geométricas, las cuales toman la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial. Éstas están escritas en términos de cuadrivectores y tensores covariantes, que son objetos geométricos definidos en M^4. Estos objetos se relacionan mediante formas diferenciales en relaciones geométricas que al expresarlas en componentes de los sistemas coordenados Lorentz proporcionan las ecuaciones para el campo electromagnético.

La cuadricorriente J^α esta descrita por una 1-forma y lleva la información sobre la distribución de cargas y corrientes. Sus componentes son:

$$J^\alpha = (c\rho(\mathbf{r},t), \mathbf{J}(\mathbf{r},t))$$

Que debe cumplir la siguiente relación geométrica para que se cumpla la ecuación de continuidad.

$$\delta J = 0$$

Escrito en componentes de los sistemas coordenados Lorentz queda:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0$$

Para poner en correspondencia objetos del mismo rango, se utiliza el operador de Laplace-Beltrami o Laplaciana definida como:

$$\Box = d\delta + \delta d$$

Podemos poner en correspondencia el cuadrivector densidad de corriente con otro objeto del mismo rango como es el cuadripotencial, que lleva la información del potencial eléctrico y el potencial vector magnético.

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

O escrito en coordenadas Lorentz obtenemos que:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 J^\alpha$$

Expresión que reproduce las ecuaciones de onda para los potenciales electromagnéticos.

La 1-forma A lleva la información sobre los potenciales de los observadores inerciales siendo sus componentes:

$$A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right)$$

Para obtener el objeto geométrico que contiene los campos, tenemos que subir el rango de A mediante el operador diferencial exterior ∂obteniendo la 2-forma F campo electromagnético. En forma geométrica podemos escribir:

$$F = dA$$

Que expresado para un sistema inercial Lorentz tenemos que:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Con lo que obtenemos el tensor de campo electromagnético.

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Primer par de ecuaciones de Maxwell

La siguientes expresiones ligan los campos con las fuentes, relacionamos la cuadricorriente con el tensor campo electromagnético mediante la forma geométrica:

$$\delta F = \mu_0 J$$

O bien en coordenadas Lorentz:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

Obtención de las ecuaciones

Para un observable en **S** partiendo de expresión en coordenadas Lorentz podemos obtener:

- Para $\nu = 0$tenemos que: $\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 J^0$, entonces:

$$\mu_0 c\rho(\mathbf{r}, t) = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]$$

Por tanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{c}$$

- Para $\nu = 1, 2, 3$ podemos obtener de la misma forma que:

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Segundo par de ecuaciones de Maxwell

Corresponden a las ecuaciones homogéneas. Escritas en forma geométrica tenemos que:

$$\delta * F = 0$$

Que corresponde con la expresión en los sistemas coordenados Lorentz:

$$\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$$

Donde el tensor $*F$es el tensor dual de F. Se obtiene mediante el operador de Hodge.

Obtención de las ecuaciones

- Para $\nu = 0$:

$$\partial_\mu * F^{\mu 0} = \partial_1 * F^{10} + \partial_2 * F^{20} + \partial_3 * F^{30} = \left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right] = 0$$

Por tanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Para $\nu = 1, 2, 3$se obtiene la ecuación vectorial:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

La propiedad $\partial_\alpha * F^{\alpha\beta} = 0$reproduce las ecuaciones de Maxwell internas, que se puede expresar como $d\mathbf{F} = 0$, que se puede escribir en los sistemas coordenados Lorentz como:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$$

Podemos resumir el conjunto de expresiones que relacionan los objetos que describen el campo electromagnético en la siguiente tabla. La primera columna son las relaciones geométricas, independientes de cualquier observador; la segunda columna son las ecuaciones descritas mediante un sistema coordenado Lorentz; y la tercera es la descripción de la relación y la ley que cumple.

Forma Geométrica	Covariante Lorentz	Descripción
$\delta A = 0$	$\partial_\mu A^\mu = 0$	Condición/gauge de Lorentz (*)
$F = dA$	$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	Definición de Campos Electromagnéticos

$\Box A = \mu_0 J$	$\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 J^\alpha$	Ecuaciones de Ondas
$\delta F = \mu_0 J$ $\delta * F = 0$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ $\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$	Ecuaciones de Maxwell
$\delta J = 0$	$\partial_\alpha J^\alpha = 0$	Ley de conservación de la Carga

(*) *Existe una confusión habitual en cuanto a la nomenclatura de este gauge. Las primeras ecuaciones en las que aparece tal condición (1867) se deben a Ludvig V. Lorentz, no al mucho más conocido Hendrik A. Lorentz. (Véase: J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 3rd edition p.294)*

Finalmente el cuadrigradiente se define así:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} {}_{,\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla\right)$$

Los índices repetidos se suman de acuerdo al convenio de sumación de Einstein. De acuerdo con el cálculo tensorial, los índices pueden subirse o bajarse por medio de la matriz fundamental *g*.

El primer tensor es una expresión de dos ecuaciones de Maxwell, la ley de Gauss y la ley de Ampere generalizada; la segunda ecuación es consecuentemente una expresión de las otras dos leyes.

Se ha sugerido que el componente de la fuerza de Lorentz $\vec{v} \times \vec{B}$se puede derivar de la ley de Coulomb y por eso la relatividad especial asume la invariancia de la carga eléctrica.[17] [18]

Expresión de las ecuaciones para una frecuencia constante

En las ecuaciones de Maxwell, los campos vectoriales no son solo funciones de la posición, en general son funciones de la posición y del tiempo, como por ejemplo $\vec{H}(x, y, z, t)$. Para la resolución de estas ecuaciones en derivadas parciales, las variables posicionales se encuentran con la variable temporal. En la práctica, la resolución de dichas ecuaciones pueden contener una solución armónica (sinusoidal).

Con ayuda de la notación compleja se puede evitar la dependencia temporal de los resultados armónicos, eliminando así el factor complejo de la expresión $e^{j\omega t}$. Gran parte de las resoluciones de las ecuaciones de Maxwell toman amplitudes complejas, además de no ser solo función de la posición. En lugar de la derivación parcial en el tiempo se tiene la multiplicación del factor imaginario $j\omega$, donde ω es la frecuencia angular.

En la forma compleja, las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma:[11]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

Véase también

- Electromagnetismo
- James Clerk Maxwell
- Oliver Heaviside
- Carga
- Onda electromagnética
- Ecuación de onda electromagnética
- Ecuaciones de Jefimenko
- Ley de Gauss
- Ley de Faraday
- Ley de Ampère

Referencias y Notas

1. ↑ «Ecuaciones de Maxwell» (en español) (1999 de agosto). Consultado el 15 de enero, 2008.
2. ↑ «[http://www.zpenergy.com/downloads/Orig_maxwell_equations.pdf On the Notation of MAXWELL's Field Equations]» (en inglés). Consultado el 08/01/2008.
3. ↑ [Ángel Franco García: Universidad del País Vasco] (octubre de 2006). «El espectro electromagnético» (en español). Consultado el 15/01/2008.
4. ↑ «Teorema de Gauss y Flujo Eléctrico». Consultado el 19/01/2008.
5. ↑ «Línea de cargas. Ley de Gauss». Consultado el 18/01/2008.
6. ↑ [a b c d e] Richard Feynman (1974). *Feynman lectures on Physics Volume 2* (en inglés). Addison Wesley Longman. ISBN 0-201-02115-3.
7. ↑ «Magnetostática». Consultado el 19/01/2008.
8. ↑ «Concepto de Flujo». Consultado el 19/01/2008.
9. ↑ «Ley de Faraday-Henry». Consultado el 19/01/2008.
10. ↑ [a b] «Ley de Ampere-Maxwell». Consultado el 20/01/2008.
11. ↑ [a b c] Ángel Cardama Aznar (2002). *Antenas*. UPC. ISBN 84-8301-625-7.
12. ↑ Liliana I. Perez. «APUNTE:Ecuaciones de Maxwell». Consultado el 22/01/2008.
13. ↑ [a b c] La web de Física (2008). «Ecuaciones de Maxwell». Consultado el 23/01/2008.
14. ↑ «Potencial Vector Magnético». Consultado el 21/01/2008.
15. ↑ «Ecuaciones del Electromagnetismo». Consultado el 21/01/2008.

16. ↑ «Professor Clerk Maxwell on the electromagnetic field» (en inglés). Consultado el 21/01/2008.
17. ↑ L. D. Landau, E. M. Lifshitz (1980). *The Classical Theory of Fields* (en inglés). Butterworth-Heinemann. ISBN 0-7506-2768-9.
18. ↑ Richard E Haskell (2006). «Special relativity and Maxwell equations» (en inglés). Consultado el 23/01/2008.

Enlaces externos

- Fundamentos de las Ecuaciones de Maxwell
- On Physical Lines of Force
- A dinamical theory of the electromagnetic field Trabajo original de Maxwell
- Monografías.com archivo sobre ecuaciones de Maxwell
- Modelo de Maxwell
- Fundamentos de la radiación